Mise en perspective d'une modélisation d'un système de PEN sur les automobilistes

Julie Bulteau[1]

Résumé : Cet article analyse le fonctionnement et la faisabilité d'un système de permis d'émissions négociables internalisant les externalités négatives de l'automobile. L'objectif de ce travail est d'élaborer un cadre théorique microéconomique de référence. Nous supposons que l'autorité régulatrice d'une ville met en place un système de permis sur le nombre de kilomètres parcourus en voiture particulière afin de réduire la pollution. La modélisation, utilisant une fonction C.E.S. (*Constant Elasticity Substitution*), détermine une situation d'équilibre sans réglementation, une situation d'équilibre avec la contrainte environnementale et analyse les effets de cet instrument sur le bien-être social, le but étant de trouver le quota optimal afin d'aboutir à l'objectif environnemental souhaité.

[1] Doctorante/ATER à l'Institut d'Économie et de Management de Nantes-I.A.E
LEMNA-Laboratoire d'Économie et de Management Nantes Atlantique
Chemin de la Censive du Tertre. B.P 52231, 44322 Nantes Cedex 3.

1. Introduction

La contribution des transports dans le réchauffement climatique n'est plus à prouver. Afin de maîtriser les émissions dues aux transports et notamment celles des déplacements urbains, les gouvernements possèdent différents outils et mesures d'action. Le choix d'un instrument de contrôle de la pollution est déterminant dans les politiques environnementales. Certains outils sont plus utilisés que d'autres comme la taxe pigouvienne ou les marchés des droits à polluer. Les travaux de Hepburn (2006), mais aussi de Goulder et Parry (2008), analysent en détail les avantages et inconvénients de ces outils.

La piste des permis d'émissions négociables (PEN), comme outil économique favorisant la mobilité durable, est de plus en plus évoquée dans les recherches relatives aux politiques de transports urbains. L'utilisation d'un marché de droits à polluer dans le secteur industriel n'est pas nouvelle, mais l'idée d'appliquer ce système aux transports, et notamment aux automobilistes, est assez récente. Nous pouvons citer les travaux de Wang (1994) sur les constructeurs d'automobiles, et ceux de Verhoef *et al.* (1997) montrant l'intérêt des permis négociables comme moyen de réguler les externalités liées aux transports routiers, notamment en limitant le trafic dans les zones urbanisées. Plus récemment, Goddard (1997, 1999), ainsi que Raux et Marlot (2005), ont développé des modèles de permis d'émissions sur les automobilistes. Le modèle de Goddard (1997) a montré la faisabilité d'un marché de permis négociables sur les automobilistes de la ville de Mexico. Ce modèle était innovant dans la mesure où il intégrait de la flexibilité à travers la mise en place d'un système de permis dans un système déjà existant[2]. Le travail de Goddard est centré sur la pertinence de la mesure des émissions et sur l'élaboration de la contrainte environnementale. Quant au modèle proposé par Raux et Marlot (2005), il est ciblé sur un système de permis « à la pompe », c'est-à-dire sur les quantités d'essence consommées.

En puisant notamment nos sources de réflexions sur les formalisations d'un système de PEN appliqué aux entreprises, comme celle de Pratlong (2005), nous élaborons les prémisses d'un modèle sur le fonctionnement de cet outil appliqué aux automobilistes d'une zone urbaine. Notre raisonnement part de l'hypothèse suivante : l'autorité régulatrice d'une ville met en place un système de PEN pour limiter le nombre de kilomètres parcourus en automobile, afin de réduire la pollution émise. Dans un premier temps, nous établissons le modèle de référence, c'est-à-dire la situation lorsque l'automobiliste n'est soumis à aucune

[2] En effet, l'interdiction de conduire certains jours de la semaine dans la ville de Mexico était déjà en œuvre en 1997.

contrainte environnementale. Un deuxième temps est consacré à l'analyse de la situation lorsque l'autorité régulatrice impose un quota de kilomètres à parcourir à l'automobiliste. Enfin, nous étudions l'équilibre sur le marché des permis, et nous procédons à l'analyse des effets de ce système de permis sur le bien-être social afin de trouver la quantité optimale de permis à allouer.

2. Le modèle

Nous considérons *N* consommateurs de transports indexé $i = 1,...,N$. Le consommateur représentatif *i* peut se déplacer soit en voiture particulière notée V_i qui produit des émissions polluantes (externalités négatives), soit en transports collectifs TC_i supposés non-polluants. Nous posons une fonction d'utilité pour le consommateur $U_i(V_i, TC_i)$ et nous considérons que V_i et TC_i sont exprimés en kilomètres parcourus. Nous supposons que U_i est croissante et quasi concave en V_i et TC_i, malgré une préférence prononcée pour l'utilisation de l'automobile. Les deux modes de transports sont parfaitement substituables, ce qui engendre deux solutions en coin : $U_i(V_i, 0) > 0$ et $U_i(0, TC_i) > 0$. Nous posons R_{T_i} le revenu « transport » que l'agent *i* consacre à ses déplacements, p_V le coût de la voiture par kilomètre parcouru représentant les dépenses de carburant et d'assurance et enfin p_{TC}, le prix des transports collectifs par kilomètre parcouru.

2.1. L'équilibre sans régulation environnementale

Nous considérons, comme cas de référence, une situation où l'autorité régulatrice de la ville n'impose aucune réglementation sur l'utilisation de la voiture. Cette section décrit la situation d'équilibre avant la mise en place d'un instrument économique tel que les permis d'émissions négociables. Ainsi, l'agent *i* cherche à maximiser son utilité sous sa contrainte budgétaire :

$$\begin{cases} Max U_i\left(V_i, TC_i\right) \\ s.c.\ p_V V_i + p_{TC} TC_i \leq R_{T_i} \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$$

Le Lagrangien associé est le suivant : $L = U_i(V_i, TC_i) - \lambda\left(p_V V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i}\right)$ **(2)**

Les conditions du premier ordre trouvées sont :

$$CPO_1 : \frac{\partial L}{\partial V_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_i}{\partial V_i} - p_V \lambda = 0 \quad (\mathbf{3})$$

$$CPO_2 : \frac{\partial L}{\partial TC_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_i}{\partial TC_i} - p_{TC} \lambda = 0 \quad (\mathbf{4})$$

Grâce aux conditions (**3**) et (**4**), nous obtenons le taux marginal de substitution suivant :

$$TMS = \frac{Um_{iV}}{Um_{iTC}} = \frac{p_V}{p_{TC}} \qquad (\mathbf{5})$$

À l'optimum, le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix.

Nous examinons maintenant la situation où l'agent i a des préférences représentées par une fonction d'utilité C.E.S. (*Constant Elasticity Substitution*).

2.1.1. Fonction d'utilité de la forme C.E.S. (*Constant Elasticity Substitution*)

Nous considérons la fonction d'utilité suivante : $U_i(V_i, TC_i) = [a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$, où a_i représente la part du budget transport que l'agent i consacre à l'utilisation de sa voiture. a_i est supérieur à $\frac{1}{2}$, puisque l'agent préfère utiliser sa voiture que les transports collectifs (TC). La raison principale de l'utilisation de la forme C.E.S est qu'elle englobe une famille très large de formes traditionnelles selon le niveau d'élasticité de substitution noté : σ, s'écrivant notamment $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$. L'identification du paramètre ρ est donc cruciale, et sera effectuée dans cette section. Cette forme C.E.S. respecte les conditions suivantes : elle est croissante et quasi concave en V_i et TC_i. L'agent i cherche à maximiser son utilité sous la contrainte budgétaire :

$$\begin{cases} Max U_i\left(V_i, TC_i\right) = [a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \\ s.c. \quad p_V V_i + p_{TC} TC_i \le R_{T_i} \qquad (\lambda) \\ s.c. \quad V_i \ge 0 \qquad (\mu_V) \\ s.c. \quad TC_i \ge 0 \qquad (\mu_{TC}) \end{cases} \quad (\mathbf{6}) \text{ avec } i = 1, \dots, N$$

Soit le Lagrangien associé :

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i}\right) + \mu_V V_i + \mu_{TC} TC_i \qquad (\mathbf{7})$$

Suivant ce programme, plusieurs cas se dessinent selon différentes conditions. Trois situations peuvent être prises en compte afin de refléter les déplacements domicile-travail des individus. En outre, nous pouvons considérer que l'individu utilise les deux moyens de transport : la voiture et les transports collectifs, pour effectuer le trajet. Dans ce cas, nous obtenons une solution intérieure à la maximisation (cas n°1). La deuxième situation, dont nous devons tenir compte, est celle où les transports collectifs ne sont pas utilisés. Ce cas peut se vérifier notamment lorsque les TC sont considérés comme trop chers, ou bien qu'il n'y ait pas, à proximité du lieu d'habitation, une station de TC : par conséquent, l'individu utilisera un seul moyen de transport : la voiture. Cette situation est relative à la première solution en coin du programme (cas n°2). Enfin, le dernier cas analysé concerne les individus utilisant seulement les transports collectifs. Cette situation renvoie, par exemple, aux individus ne possédant pas de voiture ou disposant d'un arrêt de transports collectifs à proximité de leur lieu d'habitation (et/ou de travail). Cela représente la deuxième solution en coin du programme (cas n°3). Cependant, ces trois cas exposés n'englobent pas toutes les solutions dont dispose un individu pour faire un déplacement domicile-travail. Néanmoins, l'avantage de leur analyse est d'obtenir un aperçu des possibilités pouvant être envisagées.

- **CAS N°1** : Les deux modes de transports sont utilisés

Comme nous l'avons mentionné précédemment, si tous les modes de transports sont utilisés, à savoir la voiture V_i et les transports collectifs TC_i, nous obtenons une solution intérieure puisque $\mu_V = 0$ et $\mu_{TC} = 0$, $V_i > 0$ et $TC_i > 0$.

Le Lagrangien associé est : $L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i}\right)$ (**8**)

Les deux conditions du premier ordre, dont les calculs sont présentés en annexe n°1, nous donnent le taux marginal de substitution suivant : $\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1} = \frac{p_V}{p_{TC}}$ (**9**)

Nous avons donc à l'optimum l'égalité entre le rapport des utilités marginales et le rapport des prix.

En prenant en compte que $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ et la condition (**9**), à l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs pour l'agent *i* sont les suivants :

$$V_i^* = \left(\frac{a_i}{p_V}\right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i}}{a_i^{\sigma} p_V{}^{1-\sigma} + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right) \quad \textbf{(10a)},$$

$$TC_i^* = \left(\frac{1-a_i}{p_{TC}}\right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i}}{a_i^{\sigma} p_V{}^{1-\sigma} + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right) \quad \textbf{(10b)}$$

où (*) dénote la situation de référence (sans réglementation environnementale).

Pour l'ensemble des individus *N*, nous avons les relations suivantes :

$$V^* = \sum_{i=1}^{N} V_i^* \quad \text{et} \quad TC^* = \sum_{i=1}^{N} TC_i^*$$

Ainsi, l'équilibre de référence pour *N* individus est déterminé par :

$$V^* = \frac{1}{p_V{}^{\sigma}} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i{}^{\sigma} R_{T_i}}{a_i p_V{}^{1-\sigma} + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right) \quad \textbf{(11a)} \quad \text{et} \quad TC^* = \frac{1}{p_{TC}{}^{\sigma}} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(1-a_i)^{\sigma} R_{T_i}}{a_i p_V{}^{1-\sigma} + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right) \quad \textbf{(11b)}$$

Ces résultats sont conformes à nos attentes. En effet, les kilomètres parcourus en voiture et ceux en transports collectifs, à l'équilibre, sont croissants avec le revenu des individus (R_{T_i}) et décroissants avec leur coût respectif (p_V et p_{TC}). En outre, dans le cas où les deux modes de transports sont employés, l'utilisation de la voiture et celle des TC, à l'équilibre, possèdent les caractéristiques de biens normaux, dans la mesure où si les prix augmentent, les kilomètres parcourus diminueront, alors que si le revenu des individus s'accroît, les kilomètres parcourus augmenteront.

- **CAS N°2** : Le mode des transports collectifs n'est pas utilisé : première solution en coin

Nous considérons, à travers ce deuxième cas, que l'individu utilise seulement sa voiture pour réaliser le trajet domicile-travail. Cette situation représente assez bien nos modes de vie actuels où environ 70% des déplacements domicile-travail se font uniquement en voiture particulière.

Si les transports collectifs ne sont pas utilisés, une solution en coin se profile. Cette situation renvoie au système $\begin{Bmatrix} TC_i = 0\,, & \mu_{TC} > 0 \\ V_i > 0\,, & \mu_V = 0 \end{Bmatrix}$ engendrant le Lagrangien suivant:

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_{TC} TC_i \quad (\mathbf{12})$$

Après avoir déterminé les conditions de premier ordre, présentées en annexe n°1, nous obtenons le taux marginal de substitution suivant : $\frac{a_i}{(1-a_i)} \left(\frac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} > \frac{p_V}{p_{TC}}$ (**13**)

Cette relation (**13**) nous indique que le prix des transports collectifs est relativement trop élevé comparé au rapport des utilités marginales. C'est pourquoi les TC ne sont pas utilisés. En réalité, d'autres éléments engendrant la non-utilisation des TC peuvent exister. Par exemple, le simple fait que notre lieu d'habitation ne soit pas desservi par les TC entraîne inévitablement une non utilisation de ceux-ci.

Toutefois, à l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs sont :

$$V_i^{*'} = \frac{R_{T_i}}{p_V} \quad (\mathbf{14a}) \text{ et } TC_i^{*'} = 0 \quad (\mathbf{14b})$$

Ainsi, pour les *N* individus, dans le cas où les transports collectifs ne sont pas utilisés, l'équilibre de référence est déterminé par :

$$V^{*'} = \frac{1}{p_V} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} \quad (\mathbf{15a}) \quad \text{et} \quad TC^{*'} = 0 \quad (\mathbf{15b})$$

Cette relation (**15a**) nous apprend que le nombre de kilomètres parcourus en voiture, à l'équilibre, est croissant avec le revenu (R_{T_i}) et décroissant avec le coût de la voiture (p_V). De la sorte, si le revenu transport des individus augmente, alors le nombre de kilomètres parcourus en voiture augmentera et au contraire, si le coût de la voiture augmente, l'individu diminuera son nombre de kilomètres parcourus en voiture. Par ailleurs, nous remarquons qu'à l'équilibre, le budget transport des individus est totalement consacré à l'utilisation de la voiture puisque les TC ne sont pas utilisés.

➢ **<u>CAS N°3</u>** : L'automobile n'est pas employée : deuxième solution en coin

Avec ce troisième cas, nous supposons que seuls les transports collectifs sont utilisés. Cette situation peut représenter le fait que l'individu ne possède pas de véhicule particulier ou bien qu'il décide de ne prendre que les TC dans la mesure où son lieu de travail et son lieu d'habitation sont desservis par les TC. Cette situation renvoie au système suivant $\left\{\begin{array}{l} TC_i > 0\,, \quad \mu_{TC} = 0 \\ V_i = 0\,, \quad \mu_V > 0 \end{array}\right\}$ signifiant que la voiture particulière n'est pas utilisée. Le Lagrangien associé est alors:

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_V V_i \quad \mathbf{(16)}$$

Nous obtenons le taux marginal de substitution : $\frac{a_i}{(1-a_i)} \left(\frac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} < \frac{p_V}{p_{TC}}$ (**17**) ; les calculs sont présentés en annexe n°1. Ce TMS nous indique que le prix de la voiture est trop élevé pour obtenir l'égalité entre le rapport des utilités marginales et celui des prix.

À l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs sont alors :

$$V_i^{*''} = 0 \quad \mathbf{(18a)} \text{ et } TC_i^{*''} = \frac{R_{T_i}}{p_{TC}} \quad \mathbf{(18b)}$$

Pour l'ensemble des individus, l'équilibre est déterminé par :

$$V^{*''} = 0 \quad \mathbf{(19a)} \text{ et } TC^{*''} = \frac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} \quad \mathbf{(19b)}$$

À l'équilibre, l'équation (**19b**) nous informe que le nombre de kilomètres parcourus en transport collectif est croissant avec le revenu $\left(R_{T_i}\right)$ et décroissant avec le prix des TC $\left(p_{TC}\right)$. En outre, si une augmentation du prix des transports collectifs est appliquée, alors l'individu diminuera son nombre de kilomètres parcourus en TC. Au contraire, si le revenu est augmenté, les kilomètres parcourus en TC le seront aussi. L'automobile n'étant pas utilisée, l'individu consacre la totalité du budget transport à l'utilisation des transports collectifs.

2.1.2. Les différentes situations selon la valeur de l'élasticité

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'identification du paramètre ρ est capitale dans l'analyse d'une fonction d'utilité C.E.S. Selon sa valeur, nous pouvons déterminer différentes formes traditionnelles de la fonction d'utilité telles que la forme Cobb-Douglas, la forme Leontief ou encore une simple forme linéaire. En outre, ces différents types de fonction d'utilité nous informent sur la nature des modes de transports telle que leur substituabilité ou leur complémentarité. Nous avons recensé trois principaux cas, que nous exposons et étudions.

- **<u>Fonction Cobb-Douglas</u> : Modes de transports pas totalement substituables**

  valeur de l'élasticité de substitution quand ρ tend vers zéro : $\rho \to 0$

La condition, donnée par ρ tendant vers zéro, suppose que l'élasticité de substitution σ est toujours égale à l'unité. Cela implique, certes, une substituabilité entre les différents modes de transports, mais qui est considérée comme non parfaite.

À l'équilibre, le taux marginal de substitution déterminé par l'équation (**9**) devient alors le suivant:

$$\frac{a_i TC_i}{(1-a_i)V_i} = \frac{p_V}{p_{TC}} \quad (\mathbf{20})$$

La relation (**20**) représente les préférences déterminées par une fonction d'utilité de la forme Cobb-Douglas suivante : $U_i(V_i, TC_i) = V_i^{a_i} TC_i^{1-a_i}$. Cette forme de fonction suppose non seulement que la voiture peut remplacer les transports collectifs et inversement, mais elle implique aussi la positivité des deux modes de transports : $V_i > 0 \; et \; TC_i > 0$. Cette hypothèse semble assez restrictive et ne paraît pas se vérifier dans les déplacements domicile-travail dans la mesure où l'individu peut, ne pas utiliser l'un des modes de transport. Nous étudions, tout de même, ce cas afin d'avoir un point de vue global de toutes les situations de notre modélisation.

Avec ce type de fonction, le nouvel équilibre pour l'agent *i* est alors :

$$V_i^* = \frac{a_i R_{T_i}}{p_V} \text{ } (\mathbf{21a}) \text{ et } TC_i^* = \frac{(1-a_i) R_{T_i}}{p_{TC}} \text{ } (\mathbf{21b})$$

Pour les N individus, nous obtenons :

$$V^* = \frac{1}{p_V} \sum_{i=1}^{N} a_i R_{T_i} \text{ } (\mathbf{22a}) \text{ et } TC^* = \frac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} (1-a_i) R_{T_i} \quad (\mathbf{22b})$$

Comme dans le cas général de la fonction C.E.S., où les deux modes de transports sont utilisés, les kilomètres parcourus en voiture, à l'équilibre, sont croissants avec le revenu et décroissants avec le coût de la voiture. Il en est de même pour les kilomètres parcourus en TC : à l'équilibre, ils sont croissants avec le revenu et décroissants avec leur prix (p_V). Cependant, nous soulignons que, dans cette situation, les modes de transports ne sont pas totalement substituables, puisque non seulement la voiture, mais aussi les transports collectifs doivent être utilisés, ce qui n'est pas nécessairement observé pour les déplacements domicile-travail.

- **<u>Forme linéaire</u> : Modes de transports parfaitement substituables**
  valeur de l'élasticité quand le paramètre ρ tend vers l'unité : $\rho \to 1$

Si le paramètre ρ tend vers l'unité, alors le TMS déterminé par l'équation (**9**) devient : $\frac{a_i}{(1-a_i)} = \frac{p_V}{p_{TC}}$ (**23**). Cette relation représente le TMS d'une fonction d'utilité de forme linéaire impliquant la parfaite substituabilité entre l'automobile et les transports collectifs.

Étant donné que nous supposons la contrainte budgétaire saturée, la courbe d'indifférence peut se confondre, à l'équilibre, avec cette dernière. Nous trouvons alors, à l'équilibre, une première solution de la forme suivante :

$$p_V V_i^* + p_{TC} TC_i^* = R_{T_i} \quad (\mathbf{24})$$

Cependant, deux solutions en coin peuvent être relevées. La première reflète l'individu utilisant seulement son automobile, les kilomètres parcourus en voiture particulière, à l'équilibre, sont alors de la forme : $V_i^* = \frac{R_{T_i}}{p_V}$. Cette quantité d'équilibre signifie que le nombre de kilomètres parcourus est décroissant avec le coût de l'automobile, mais croissant avec le revenu. Par ailleurs, nous remarquons que tout le revenu transport de l'individu est dépensé dans l'utilisation de l'automobile puisque les TC ne sont pas utilisés. La seconde solution en coin concerne l'individu utilisant uniquement les transports collectifs. Le nouvel équilibre sera de la forme : $TC_i^* = \frac{R_{T_i}}{p_{TC}}$, montrant que le nombre de kilomètres parcourus en transports collectifs est croissant avec le revenu et décroissant avec le prix. Finalement, nous obtenons à l'équilibre, pour les N individus, trois situations en fonction des combinaisons possibles d'utilisation des modes de transports, à savoir :

Si les deux modes de transports sont utilisés : $p_V \sum_{i=1}^{N} V_i^* + p_{TC} \sum_{i=1}^{N} TC_i^* = \sum_{i=1}^{N} R_{T_i}$ (**25**)

Si seule la voiture est utilisée : $V^* = \frac{1}{p_V} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i}$; (**26**)

Si seuls les TC sont utilisés : $TC^* = \frac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i}$ (**27**)

Ces trois situations d'équilibre, représentées par les équations (**25**), (**26**) et (**27**), et venant de la forme linéaire de l'utilité reflètent davantage la réalité que celles décrites par la forme Cobb-Douglas, dans la mesure où l'individu peut soit combiner les deux modes de transports, soit en utiliser un seul afin de faire le déplacement domicile-travail. Néanmoins, la substituabilité parfaite entre les deux modes est une hypothèse forte.

- **Forme Leontief : Modes de transports complémentaires**

valeur de l'élasticité quand ρ tend vers l'infinie : $\rho \to \infty$

Le TMS déterminé par l'équation (**9**) tend vers zéro lorsque le paramètre ρ tend vers l'infini. Nous sommes confrontés à une fonction d'utilité de la forme Leontief, c'est-à-dire : $U_i(V_i, TC_i) = Min\left[a_i V_i ; (1-a_i) TC_i\right]$. Cette forme nous indique que les biens consommés sont des biens complémentaires. En outre, nous pouvons imaginer qu'un agent i parcourt un certain nombre de kilomètres en automobile, puis stationne son véhicule afin de continuer son itinéraire en transports collectifs. C'est notamment le cas pour les individus n'ayant pas accès aux transports collectifs à proximité de leur domicile. Dès lors, les agents utilisent leur véhicule jusqu'à une station de TC (tram, train de banlieue, R.E.R…) pour ensuite emprunter les TC afin d'arriver sur leur lieu de travail. Cependant, nous notons que cette complémentarité semble entraîner des investissements dans des infrastructures adaptées telles que des aires de stationnement au niveau des stations des TC. Toutes les villes ne disposent pas assurément de ces infrastructures. Néanmoins, leur existence est bien réelle. Par exemple, les parkings relais trams à Nantes ont été pensés et construits justement pour favoriser la complémentarité entre l'automobile et les TC. Ils sont présents à chaque extrémité des lignes de tramways et permettent aux individus de stationner leur véhicule afin d'utiliser les TC pour arriver dans le centre urbain.

2.2. L'équilibre avec régulation environnementale

Nous supposons que l'autorité régulatrice met en place un système de permis d'émissions négociables sur le nombre de kilomètres parcourus en automobile, afin de réguler la pollution provoquée par cette dernière. Nous proposons d'analyser les conséquences de l'instauration de cet outil, notamment sur l'équilibre de référence déterminé dans la section précédente.

2.2.1. La relation entre les émissions polluantes et l'utilisation de l'automobile

Les externalités environnementales, engendrées par l'automobile, peuvent être réduites si les individus remplacent leurs déplacements en voiture par des déplacements en transports collectifs. Cependant, il est considéré, dans notre modèle, que les individus ont une préférence marquée pour la voiture impliquant un coefficient $a_i > \frac{1}{2}$.

Néanmoins, les émissions notées e_i sont croissantes avec le nombre de kilomètres parcourus en voiture V_i par l'agent *i*. Nous supposons que chaque kilomètre parcouru émet une unité de pollution : $e_i = V_i$. Nous décidons de normaliser ces émissions en prenant en compte les normes « bonus, malus » prises lors du Grenelle de l'environnement concernant les achats de voitures en France. Le principe vise à verser un bonus écologique à la première immatriculation pour tout achat d'un véhicule particulier neuf émettant moins de 130 grammes de CO_2 par kilomètre. Nous retenons cette norme dans notre modèle. Nous supposons qu'un kilomètre parcouru équivaut à une émission de 130 gCO_2 ; la relation est la suivante : $e_i = V_i = 130\ gCO_2$.

Les émissions provoquent une dégradation de l'environnement exprimée par une fonction croissante et convexe de dommages environnementaux *D(e)*. L'objectif de l'autorité régulatrice est de maximiser le bien-être de la société, c'est-à-dire de maximiser l'utilité du consommateur en déduisant le dommage environnemental subi. Pour ce faire, l'autorité régulatrice met en place un système de permis d'émissions appliqué aux automobilistes. Les émissions sont représentées comme suit : $e = \sum_{i=1}^{N} e_i = \sum_{i=1}^{N} V_i$, alors que le plafond d'émissions fixé par l'autorité s'exprime par $\overline{e} = \overline{V} = \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i$. Chaque permis donne le droit d'émettre une unité de pollution ; autrement dit, chaque permis permet de parcourir un kilomètre en voiture. Le nombre total de ces permis définit le nombre total d'émissions autorisées.

2.2.2. L'allocation des permis

En économie de l'environnement, on distingue deux principales manières de distribuer les permis d'émissions. La première façon est déterminée par une distribution gratuite de ceux-ci. Dans ce cas, la règle de répartition la plus utilisée repose sur une allocation au prorata des émissions passées : nous parlons alors de système *grandfathering*. La deuxième manière est de distribuer les permis par une vente aux enchères. Dans ce cas, les permis sont vendus aux pollueurs les plus offrants par l'autorité régulatrice. Ce système limite les échanges entre pollueurs sur le marché dans la mesure où chaque pollueur a déjà réalisé les arbitrages dits « pollution-achats » lors des enchères initiales.

En économie des transports, la réflexion sur l'allocation de permis, si un système de PEN est préconisé, est peu étendue. Nous pouvons, tout de même, citer quelques pistes de recherche récemment développées. Dans le système de PEN étudié par Kockelman et Kalmanje (2005), les automobilistes reçoivent gratuitement une allocation monétaire permettant de circuler sur les routes soumises au péage de congestion. Ainsi, deux solutions se dessinent : si les crédits sont totalement utilisés, alors les automobilistes devront acquitter le montant du péage ; s'ils n'ont pas tout employé, ils pourront les garder ou les vendre. Le problème d'allocation des permis est aussi traité dans l'étude de Raux (2007b). Son questionnement porte non seulement sur la manière d'allouer les permis (par un système d'enchères ou gratuitement), mais aussi sur la sélection des individus recevant ces allocations. D'un côté, le système d'enchères assure l'efficacité économique du fait qu'il révèle les préférences des agents pollueurs. D'un autre côté, ce système supprime le principal avantage d'acceptabilité de l'instrument des permis dû à l'achat de ces derniers dès le départ. En outre, si une allocation gratuite des PEN est décidée, il faut déterminer à qui les donner : les possesseurs de voiture ou les habitants de la ville. Si une allocation gratuite est réalisée auprès des habitants, cela revient, comme le mentionne Raux (2007b), « à compenser les habitants pour les conséquences de la congestion et de la pollution qu'ils subissent ». En effet, certains des habitants ne possèdent pas de voiture ou utilisent des modes doux de déplacements.

Dans notre modèle, nous supposons une allocation gratuite des permis afin de garantir la mobilité pour tous. Par ailleurs, comme cela a été signalé par Raux (2007b), l'allocation gratuite constitue le principal avantage relatif à l'acceptabilité de l'instrument des PEN comparé à celui du péage urbain classique. Nous supposons notamment que cette distribution se fait aux *N* individus devant se rendre au travail dans le centre-ville. Ce système vise les déplacements domicile-travail. Les individus n'utilisant que les TC pourront alors vendre les PEN dont ils disposent. Les individus dont la quantité de PEN n'est pas épuisée pourront vendre le surplus ou le garder pour une utilisation ultérieure. Enfin, les agents ayant utilisé tous leurs permis et voulant continuer à utiliser leur véhicule pourront acheter des permis supplémentaires sur le marché.

2.2.3. La maximisation de l'utilité avec un système de PEN

L'autorité régulatrice met en place le système de PEN. L'allocation des permis se fait gratuitement, les individus reçoivent alors un nombre de permis : $\overline{V}_i$. Les agents, dans la maximisation de leur utilité, considèrent cette allocation de permis comme donnée, ainsi que le prix de celui-ci noté : p_e.

Ainsi, l'individu doit prendre en compte son nombre de kilomètres alloué, ainsi que le prix des permis s'il désire parcourir plus de kilomètres en voiture. Le programme est le suivant :

$$\begin{cases} Max U_i(V_i, TC_i) \\ s.c. \left(p_V V_i + p_e \left(V_i - \overline{V}_i \right) + p_{TC} TC_i \leq R_{T_i} \right) \end{cases} \quad \mathbf{(28)}$$

Soit le Lagrangien associé : $L = U_i\left(V_i, TC_i\right) - \lambda\left(p_V V_i + p_e\left(V_i - \overline{V}_i\right) + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right)$ **(29)**

Si $V_i > \overline{V}_i$, alors l'agent *i* devra acheter des permis en fin de période.

Si $V_i < \overline{V}_i$, la dotation initiale en permis est supérieure au nombre de permis détenus en fin de période, et alors l'agent pourra les vendre ou les garder pour une future utilisation.

Nous obtenons alors un nouveau taux marginal de substitution : $\frac{Um_{V_i}}{Um_{TC_i}} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**30**)

Nous remarquons que le prix de l'utilisation de la voiture s'est élevé du montant du prix du permis. Le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des modes de transports où le prix de l'automobile intègre le coût du permis d'émissions.

La fonction d'utilité C.E.S. utilisée dans la section précédente est reprise afin d'analyser les conséquences de la mise en place du système de PEN.

2.2.4. Fonction d'utilité C.E.S. et le système de PEN

De nouveau, l'agent *i* cherche à maximiser sa fonction d'utilité : $U_i(V_i, TC_i) = [a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$ sous la nouvelle contrainte budgétaire intégrant le prix du permis, soit le programme suivant :

$$\begin{cases} Max U_i(V_i, TC_i) = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \\ s.c.\ p_V V_i + p_e\left(V_i - \overline{V}_i\right) + p_{TC} TC_i \leq R_{T_i} \quad (\lambda) \\ s.c. V_i \geq 0 \qquad (\mu_V) \\ s.c. TC_i \geq 0 \qquad (\mu_{TC}) \end{cases} \quad \textbf{(31)}$$

Le Lagrangien associé est :

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(p_v V_i + p_e(V_i - \overline{V}_i) + p_{TC} TC_i - R_{T_i}\right) + \mu_V V_i + \mu_{TC} TC_i \quad \textbf{(32)}$$

Trois cas se dessinent en fonction des différentes utilisations des modes de transports. Nous retrouvons la situation où les deux modes de transports sont utilisés (la voiture et les TC), la situation où l'individu utilise uniquement la voiture particulière et enfin, la troisième situation représente celle où seuls les TC sont utilisés.

➢ **CAS N°4** : Les deux modes de transports sont utilisés

Comme nous l'avons observé dans le cas n°1, si les deux modes de transports (V_i et TC_i) sont utilisés, impliquant $\mu_V = 0$ et $\mu_{TC} = 0$, ainsi que $V_i > 0$ et $TC_i > 0$, alors le programme possède une solution intérieure. Le Lagrangien associé à ce cas est :

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_e (V_i - \overline{V}_i) + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) \qquad \textbf{(33)}$$

Les deux conditions du premier ordre, présentées dans l'annexe n°2, donnent le taux marginal de substitution suivant : $\frac{a_i}{(1-a_i)} \left(\frac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**34**)

L'équation (**34**) nous indique que le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix où le prix de l'utilisation de la voiture est augmenté du prix des permis p_e.

À l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs pour l'agent *i* sont les suivants :

$$V_i^{**} = \left(\frac{a_i}{p_V + p_e} \right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma} \left(p_V + p_e \right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i \right)^{\sigma} p_{TC}^{\;1-\sigma}} \right) \qquad \textbf{(35a)}$$

$$TC_i^{**} = \left(\frac{1-a_i}{p_{TC}} \right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma} \left(p_V + p_e \right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i \right)^{\sigma} p_{TC}^{\;1-\sigma}} \right) \qquad \textbf{(35b)}$$

$$U_i^{**}(V_i^{**}, TC_i^{**}, \overline{V}_i) = \left(R_{T_i} + p_e \overline{V}_i \right) \left(a_i^{\sigma} \left(p_V + p_e \right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i \right)^{\sigma} p_{TC}^{\;1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \qquad \textbf{(35c)}$$

où (**) dénote la situation avec une réglementation environnementale.

Sachant que, pour l'ensemble des individus *N*, nous avons les relations suivantes :

$$V^{**} = \sum_{i=1}^{N} V_i^{**} \,,\; TC^{**} = \sum_{i=1}^{N} TC_i^{**} \,,\; \overline{V} = \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i \geq V^{**}$$

alors l'équilibre avec une contrainte environnementale pour les *N* individus est :

$$V^{**} = \left(\frac{1}{p_V + p_e}\right)^{\sigma} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i^{\sigma}(R_{T_i} + p_e \overline{V}_i)}{a_i^{\sigma}\left(p_V + p_e\right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}^{\ 1-\sigma}} \right) \quad \textbf{(36a)}$$

$$TC^{**} = \left(\frac{1}{p_{TC}}\right)^{\sigma} \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma}\left(p_V + p_e\right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}^{\ 1-\sigma}} \right) \quad \textbf{(36b)}$$

Nous cherchons à déterminer les effets du prix des permis des émissions (p_e) sur le nombre de kilomètres parcourus en voiture (V^{**}) et en transports collectifs (TC^{**}). Selon nos calculs présentés en annexe n°3, nous trouvons, concernant le nombre de kilomètres parcourus en voiture, la relation suivante : $\frac{\partial V^{**}}{\partial p_e} < 0$, signifiant que si le prix du permis augmente, le nombre de kilomètres parcourus en automobile diminuera. Inversement, la relation entre le nombre de kilomètres parcourus en TC et le prix du permis est positive : $\frac{\partial TC^{**}}{\partial p_e} > 0$ indiquant qu'une augmentation du prix du permis sur le marché entraîne une augmentation du nombre de kilomètres parcourus en TC par les individus. Par conséquent, le prix du permis a les effets incitatifs attendus sur les différents modes de transports.

D'une part, nous constatons que l'introduction d'un système de PEN modifie la situation d'équilibre de référence (sans régulation environnementale). D'autre part, l'objectif de réduction des émissions par la mise en place du système de PEN semble atteint. En outre, il est à souligner qu'une hausse du prix des permis a pour conséquence une hausse de la prise des TC, mais surtout une baisse de l'utilisation de la voiture engendrant une diminution des émissions polluantes. Nous pouvons aussi d'ores et déjà affirmer que s'il y a une hausse très élevée du prix du permis, alors l'individu utilisera seulement les TC et nous obtiendrons le cas n°6 où l'automobile n'est pas employée.

Cependant, nous remarquons également que la quantité de permis $\overline{V}_i$ allouée à chaque individu procure une augmentation du revenu transport dans la mesure où nous avons supposé une allocation des permis gratuite pour assurer une mobilité pour tous. De ce fait, le revenu de l'individu *i* consacré au transport se voit, dans un premier temps, augmenter du montant de l'allocation des permis. Analysons maintenant le cas où l'individu utilise uniquement sa voiture pour faire les trajets domicile-travail.

➢ **<u>CAS N°5</u>** : Les transports collectifs ne sont pas utilisés : première solution en coin

Si un seul mode de transport est utilisé, alors une solution en coin est déterminée comme nous l'avons exposé dans le cas n°2. Nous supposons, dans ce cas n°5, que les transports collectifs ne sont pas utilisés. Cette situation est reflétée par le système suivant : $\begin{Bmatrix} TC_i = 0\,, & \mu_{TC} > 0 \\ V_i > 0\,, & \mu_V = 0 \end{Bmatrix}$. Le Lagrangien associé est alors:

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_{TC} TC_i \quad (\mathbf{37})$$

Nous obtenons le taux marginal de substitution : $\dfrac{a_i}{(1-a_i)} \left(\dfrac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} > \dfrac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**38**), dont les calculs sont présentés en annexe n°2. L'analyse de la relation (**38**) nous indique que le prix des transports collectifs est relativement trop élevé, engendrant la non utilisation des TC.

À l'équilibre, la contrainte budgétaire est saturée, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs sont alors :

$$V_i^{**'} = \frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{p_V + p_e} \ (\mathbf{39a}) \text{ et } TC_i^{**'} = 0 \ (\mathbf{39b})$$

Ainsi, pour les *N* individus, dans le cas où les transports collectifs ne sont pas utilisés, l'équilibre est déterminé par :

$$V^{**'} = \frac{1}{p_V + p_e} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} + p_e \overline{V}_i \quad (\mathbf{40a}) \text{ et } TC^{**'} = 0 \quad (\mathbf{40b})$$

Au vu de la mise en place du système de PEN, nous cherchons à étudier les effets du prix du permis des émissions, seulement sur l'utilisation de la voiture $V_i^{**'}$, puisque les TC ne sont pas utilisés. Nous obtenons la relation suivante : $\dfrac{\partial V^{**'}}{\partial p_e} < 0$ si $R_{T_i} > p_V \overline{V}_i$. Cette relation nous indique qu'une augmentation du prix du permis entraîne une diminution du nombre de kilomètres parcourus en automobile si le budget transport de l'individu *i* est supérieur au prix de la voiture (p_V) multiplié par le nombre de permis alloués ($\overline{V}_i$). Ce qui est *a priori* tout le temps le cas.

Ainsi, il existe une conséquence directe d'une variation du prix du permis sur le niveau d'utilité des individus, dans la mesure où la prise des transports collectifs est nulle. En outre, le niveau d'utilité des individus diminuera si le prix du permis augmente.

Nous soulignons également que si le prix du permis augmente fortement, nous reviendrons au cas n°4 où il y a un partage modal entre l'automobile et les transports collectifs. Cependant, si l'augmentation du prix du permis se révèle vraiment très élevée, alors nous parviendrons au cas n°6 où seuls les TC sont utilisés. L'utilisation des deux modes de transports est sensiblement liée aux évolutions du prix du permis d'émissions. Ces évolutions nous renseignent sur les choix de modes de transport de l'individu *i*.

- **CAS N°6** : L'automobile n'est pas utilisée : deuxième solution en coin

Cette situation implique une seconde solution en coin de notre programme, puisque la voiture particulière n'est pas utilisée, renvoyant au système suivant $\begin{Bmatrix} TC_i > 0\,, & \mu_{TC} = 0 \\ V_i = 0\,, & \mu_V > 0 \end{Bmatrix}$. Le Lagrangien associé à cette situation est:

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(p_v V_i + p_e (V_i - \overline{V}_i) + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_V V_i \quad \textbf{(41)}$$

En combinant les deux conditions du premier ordre, dont les calculs sont présentés en annexe n°2, nous obtenons le taux marginal de substitution : $\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1} < \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**42**), signifiant que le coût total de la voiture (prix de la voiture et prix du permis) est relativement trop élevé. Cette raison peut justifier le fait que les individus prennent seulement les TC pour se déplacer.

À l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs sont alors :

$$V_i^{**''} = 0 \ \ \textbf{(43a)}, \text{ et } TC_i^{**''} = \frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{p_{TC}} \quad \textbf{(43b)}$$

Pour l'ensemble des *N* individus, l'équilibre est déterminé par :

$$V^{**''} = 0 \ \ \textbf{(44a)} \text{ et } TC^{**''} = \frac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} + pe\overline{V}_i \quad \textbf{(44b)}$$

Nous analysons, comme pour les précédents cas, l'influence du prix du permis d'émissions sur l'usage des transports collectifs à l'équilibre. Nous obtenons la relation suivante $\frac{\partial TC^{**''}}{\partial p_e} > 0$, ce qui implique qu'une augmentation du prix du permis augmentera l'utilisation des transports collectifs. Par ailleurs, nous observons qu'une diminution du prix du permis pourrait nous faire revenir au cas n°4 où les deux modes de transports sont utilisés. Cependant, nous relevons également qu'une très forte diminution du prix du permis aboutirait au cas n°5 où seule la voiture est utilisée. Par conséquent, l'évolution du prix du permis d'émission constitue un élément capital dans notre modèle.

2.2.5. Les différentes situations selon la valeur de l'élasticité

Comme nous l'avons déjà précisé, la fonction d'utilité de la forme C.E.S. permet de prendre en compte plusieurs situations selon la valeur de l'élasticité. À travers l'analyse des situations, nous déterminons les différentes natures des modes de transports.

- <u>**Fonction Cobb-Douglas**</u> **: Modes de transports substituts non parfaits**

  valeur de l'élasticité de substitution quand ρ tend vers zéro : $\rho \to 0$

Lorsque ρ tend vers zéro, le coefficient d'élasticité de substitution σ est égal à l'unité. Ainsi, le taux marginal de substitution déterminé par l'équation (**34**) devient le suivant : $\frac{a_i TC_i}{(1-a_i)V_i} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**45**)

Ce nouveau TMS représente des préférences venant d'une fonction d'utilité de la forme Cobb-Douglas : $U_i(V_i, TC_i) = V_i^{a_i} TC_i^{1-a_i}$ impliquant la substituabilité possible entre les deux modes de transports, ainsi que leur stricte positivité.

À l'équilibre, les kilomètres parcourus en voiture et en transports collectifs pour l'agent *i* sont les suivants :

$$V_i^{**} = \frac{a_i\left(R_{T_i} + p_e\overline{V}_i\right)}{p_V + p_e} \quad (\mathbf{46a}) \text{ et } TC_i^{**} = \frac{(1-a_i)\left(R_{T_i} + p_e\overline{V}_i\right)}{p_{TC}} \quad (\mathbf{46b})$$

L'équilibre, avec une contrainte environnementale, pour les *N* individus est alors:

$$V^{**} = \frac{1}{p_V + p_e} \sum_{i=1}^{N} a_i \left(R_{T_i} + p_e \bar{V}_i \right) \textbf{ (47a)} \text{ et } TC^{**} = \frac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} (1 - a_i) \left(R_{T_i} + p_e \bar{V}_i \right) \textbf{ (47b)}$$

Une fois de plus, nous cherchons à déterminer les effets du prix des permis des émissions, non seulement sur le nombre de kilomètres parcourus en voiture (V^{**}), mais aussi sur celui parcouru en transport collectif (TC^{**}).

D'une part, nous aboutissons à la relation négative suivante $\frac{\partial V^{**}}{\partial p_e} < 0$. Cette relation nous indique que si le prix du permis augmente, alors le nombre de kilomètres parcourus en automobile diminuera. D'autre part, nous obtenons pour les transports collectifs une relation positive: $\frac{\partial TC^{**}}{\partial p_e} > 0$ signifiant, au contraire, qu'une augmentation du prix du permis sur le marché engendre une augmentation du nombre de kilomètres parcourus réalisé en transports collectifs.

Les effets du prix du permis sur les quantités d'équilibre sont les mêmes que dans le cas général de la fonction C.E.S. En outre, le cas particulier de la fonction Cobb-Douglas confirme notre cas général, dans la mesure où le prix du permis influence de la même manière les quantités d'équilibre. Cependant, nous notons une différence significative entre le cas général de la fonction C.E.S. et le cas particulier de la forme Cobb-Douglas. La fonction Cobb-Douglas suppose la stricte positivité des deux modes de transports $\left(V_i > 0 \text{ et } TC_i > 0\right)$, c'est-à-dire que l'individu doit utiliser non seulement sa voiture, mais aussi les transports collectifs. Cette condition concernant l'utilisation strictement positive des deux modes est trop restrictive dans la mesure où les situations observées peuvent révéler notamment l'utilisation d'un seul mode de transport pour effectuer les déplacements domicile-travail.

- **<u>Forme linéaire</u> : Modes de transports parfaitement substituables**
  valeur de l'élasticité quand le paramètre ρ tend vers l'unité : $\rho \to 1$

Dans l'hypothèse où ρ tend vers l'unité, le TMS déterminé par l'équation (**34**) devient alors le suivant : $\frac{a_i}{(1-a_i)} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**48**). Cette nouvelle relation implique une fonction d'utilité de forme linéaire où les modes de transports sont considérés comme parfaitement substituables.

Une première solution du programme est déterminée lorsque les deux modes de transports sont utilisés. En supposant que la contrainte budgétaire est saturée, la courbe d'indifférence peut se confondre, à l'équilibre, avec cette dernière. Nous obtenons alors à l'équilibre :

$$p_V V_i^{**} + p_e (V_i^{**} - \overline{V}_i) + p_{TC} TC_i^{**} = R_{T_i} \quad \textbf{(49)}$$

Cependant, deux solutions en coin se dessinent. Si les transports collectifs ne sont pas utilisés, alors l'équilibre est déterminé par : $V_i^{**} = \dfrac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{p_V + p_e}$. Au contraire, si l'individu utilise uniquement les TC, alors nous obtenons à l'équilibre : $TC_i^{**} = \dfrac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{p_{TC}}$. Pour les N individus, nous obtenons trois situations :

Si les deux modes de transports sont utilisés :

$$p_V \sum_{i=1}^{N} V_i^{**} + p_e \sum_{i=1}^{N} (V_i^{**} - \overline{V}_i) + p_{TC} \sum_{i=1}^{N} TC_i^{**} = \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} \quad \textbf{(50)}$$

Si la voiture seule est utilisée : $V^{**} = \dfrac{1}{p_V + p_e} \sum_{i=1}^{N} \left(R_{T_i} + p_e \overline{V}_i \right)$ (**51**)

Si les TC seuls sont utilisés : $TC^{**} = \dfrac{1}{p_{TC}} \sum_{i=1}^{N} \left(R_{T_i} + p_e \overline{V}_i \right)$ (**52**)

La situation représentée par la relation (**51**) nous indique que le nombre de kilomètres parcourus en voiture, à l'équilibre, est croissant, non seulement avec le revenu, mais aussi avec la quantité de permis, et décroissant avec le coût de la voiture. Le budget transport des individus se voit augmenter par l'allocation des permis ; toutefois, la totalité de ce revenu est consacrée à l'utilisation de la voiture. La seconde solution en coin (**52**), quant à elle, montre que le nombre de kilomètres parcourus en transports collectifs, à l'équilibre, est aussi croissant avec le revenu et la quantité de permis, et décroissant avec le prix des TC. Les individus disposent d'un budget plus élevé par rapport à la situation de référence, puisqu'il comprend l'allocation des permis et est également totalement consacré à l'utilisation des TC. Ces trois situations reflètent davantage la réalité observée dans le sens où l'individu peut combiner les deux modes de transports ou se déplacer uniquement avec l'automobile ou les TC. Toutefois, nous soulignons que la parfaite substituabilité entre les deux modes est un phénomène rare.

- **<u>Forme Leontief</u> : Modes de transports complémentaires**

valeur de l'élasticité quand ρ tend vers l'infinie : $\rho \to \infty$

Lorsque l'élasticité tend vers l'infini, le TMS déterminé par l'équation (**34**) tend vers zéro. Une fonction d'utilité de la forme Leontief est alors obtenue, elle est déterminée par : $U_i(V_i, TC_i) = Min\left[a_i V_i ; (1-a_i) TC_i\right]$. La forme Léontief postule que l'automobile et les transports collectifs sont considérés comme des biens complémentaires. La complémentarité des modes de transports a été analysée particulièrement pour la situation initiale. Le même raisonnement peut être appliqué à notre situation avec le système de PEN où, dans un premier temps l'individu est contraint d'utiliser son véhicule pour accéder à une station de TC afin de terminer, dans un second temps, son trajet en TC.

2.3. Équilibre sur le marché des permis d'émissions

Après avoir déterminé les comportements des individus concernant l'utilisation des modes de transport, face à l'instauration d'un système de PEN, il nous semble fondamental d'analyser les caractéristiques du marché des PEN.

Le marché s'avère équilibré lorsque le nombre de permis alloués en début de période par l'autorité régulatrice est égal à la somme des permis détenus en fin de période. Afin que ce marché soit équilibré et conforme à la norme environnementale fixée par l'autorité régulatrice, nous supposons que le prix d'un permis d'émissions se fixe de telle sorte que les demandes de permis, c'est-à-dire les demandes de kilomètres parcourus en automobile, qui représentent les émissions totales, et la contrainte de pollution : $e = \overline{e}$, s'annulent. En outre, l'équilibre est obtenu quand : $\sum_{i=1}^{N} V_i^{**} = \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(V_i^{**} - \overline{V}_i\right) = 0$ (**53**)

Cette relation (**53**) représente une des conditions nécessaires pour atteindre l'objectif environnemental souhaité et fixé par l'autorité régulatrice. La seconde condition indispensable à la réalisation de l'équilibre sur le marché vient de la condition optimale déterminée auparavant par l'équation (**30**), à savoir $\frac{Um_{V_i}}{Um_{TC_i}} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$. Cette condition devient pour les N individus la suivante : $\frac{Um_{V_1}}{Um_{TC_1}} = \frac{Um_{V_2}}{Um_{TC_2}} = ... = \frac{Um_{V_N}}{Um_{TC_N}} = \frac{p_V + p_e}{p_{TC}}$ (**54**). Cette dernière relation nous indique que l'équilibre sur le marché est obtenu lorsque les TMS de chaque individu sont non seulement égaux entre eux, mais également égaux au rapport des prix, ce qui engendre un optimum de Pareto.

D'après les conditions (**53**) et (**54**), le prix du permis d'émission en fonction du nombre de permis alloués peut être déterminé.

De ce fait, nous considérons, dans un premier temps, le cas général de la fonction C.E.S avec la solution intérieure où les deux modes de transports sont utilisés. En combinant les équations (**53**) et (**36**), nous obtenons le prix du permis d'émissions suivant :

$$p_e = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} a_i^{\sigma} R_{T_i} - p_V \sum_{i=1}^{N} a_i^{\sigma} \overline{V}_i}{p_{TC}^{1-\sigma} \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^{\sigma} \overline{V}_i} \right)^{\frac{1}{\sigma}} - p_V \quad (\mathbf{55})$$

La relation (**55**) nous permet de tester la sensibilité du prix du permis (p_e) en fonction du nombre de permis alloués ($\overline{V}$) par l'autorité régulatrice. Ainsi, nous trouvons la relation suivante : $\frac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i} < 0$; les calculs sont présentés en annexe n°4. Cette relation signifie que le prix du permis d'émissions est une fonction décroissante de la quantité de kilomètres allouée. En outre, si la ville décide de mener une politique environnementale plus laxiste, alors elle décidera d'augmenter le nombre de permis, ce qui entraînera une diminution du prix du PEN engendrant une utilisation de l'automobile plus élevée. Ce résultat confirme notre intuition et constitue un résultat standard déterminé par les modèles de l'économie de l'environnement. En d'autres termes, si une quantité trop élevée de permis est mise sur le marché, le prix du permis d'émission tendra vers zéro, et par conséquent pourra entraîner une inefficacité du système dans la mesure où le prix du permis n'aura aucune incidence sur l'utilisation de l'automobile.

Par ailleurs, nous analysons deux autres cas de la fonction C.E.S, afin d'examiner les différentes relations entre le prix du permis des émissions et la quantité de permis allouée.

D'une part, nous nous penchons sur le prix du permis lors d'une solution en coin où seule la voiture est utilisée. Ainsi, la quantité du nombre de kilomètres parcourus en automobile à l'équilibre est déterminée par l'équation (**40**) : $V^{**'} = \frac{1}{p_V + p_e} \sum_{i=1}^{N} R_{T_i} + p_e \bar{V}_i$. En combinant la relation (**40**) avec la condition (**53**), nous obtenons la relation $\sum_{i=1}^{N} R_{T_i} = p_V \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i$ (**56**). Ce résultat nous indique que lorsque la voiture seule est utilisée, le prix du permis des émissions n'a aucune conséquence. Une augmentation du prix du permis n'entraîne *a priori* aucun changement de comportement des individus.

D'autre part, si nous considérons le cas particulier relatif à la fonction Cobb-Douglas, le prix du permis d'émission est de la forme : $p_e = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i R_{T_i} - p_V \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i}{\sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i (1 - a_i)}$ (**57**)

L'étude de l'équation (**57**), nous permet de déterminer l'influence du nombre de permis alloués sur le prix du permis. Ainsi, nous obtenons la relation : $\frac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i} < 0$, dont les calculs sont présentés en annexe n°4. Le prix du PEN est une fonction décroissante de la quantité de kilomètres allouée, comme cela a déjà été révélé dans le cas général. Par conséquent, si la ville décide de mener une politique environnementale plus stricte, elle décidera de diminuer le nombre de permis, ce qui entraînera une augmentation du prix du PEN, donc une quantité d'utilisation de la voiture moins élevée.

La détermination de la formation de l'équilibre sur le marché nous a permis d'analyser l'impact du prix du permis d'émissions, à travers leur allocation, sur l'efficacité de la politique environnementale. Le prix du permis est une des variables clés de la réussite du système. Cependant, il paraît également important et nécessaire d'examiner l'influence de la mise en place de ce système sur le bien-être de la société afin de déterminer la politique optimale.

2.4. Effets sur le bien-être social

La mise en place d'un outil économique entraîne indéniablement des modifications dans le bien-être collectif. C'est pourquoi les conséquences de la création d'un système de PEN appliqués aux automobilistes doivent êtres identifiées et analysées.

Afin d'examiner l'impact du système sur le bien-être social, nous supposons que les coûts de la mise en place de l'instrument du marché des PEN, ainsi que ceux engendrés par le contrôle de la pollution, sont nuls. Nous considérons notamment que le bien-être social se compose de l'utilité des individus et des dommages environnementaux liés à l'utilisation de l'automobile. Ainsi, nous définissons la fonction de dommage *D(e)* telle que $D(e) = D\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma \bar{V}_i\right)$ avec γ prenant une valeur comprise entre 0 et 1. *D(e)* est une fonction croissante de la quantité de permis ($\bar{V}_i$), puisque plus nous augmentons les droits à polluer, plus le dommage environnemental augmente dans une proportion γ. La fonction de bien-être de la société s'écrit :

$$W\left(\bar{V}\right) = \sum_{i=1}^{N} U_i\left(V_i, TC_i, \bar{V}_i\right) - D\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma \bar{V}_i\right) \quad \textbf{(58)}$$

En outre, l'autorité régulatrice choisit un niveau de permis $\bar{V} = \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i$ qui maximise le bien-être social représentée par la relation (**58**). En remplaçant p_e dans la fonction d'utilité de l'agent *i* par sa valeur d'équilibre trouvée précédemment, nous sommes en mesure d'exprimer la fonction de bien-être social seulement en fonction de $\bar{V}_i$:

$$W\left(\bar{V}\right) = \sum_{i=1}^{N} U_i\left(\bar{V}_i\right) - D\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma \bar{V}_i\right) \quad \textbf{(59)}$$

Ainsi, nous maximisons le bien-être social sous le respect de la contrainte environnementale afin de déterminer la situation optimale :

$$\frac{\partial W}{\partial \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i} = \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} U_i}{\partial \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i}\right) - \frac{\partial D}{\partial \sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i} = 0 \quad \textbf{(60)}$$

Il est alors déduit la relation suivante $\sum_{i=1}^{N} Um_{\bar{V}} = \sum_{i=1}^{N} Dm_{\bar{V}}$ (**61**), nous indiquant que la quantité optimale de permis sur le marché est obtenue lorsque la somme des utilités marginales des individus est égale à la somme des dommages marginaux. Autrement dit, lorsqu'on met une unité supplémentaire de permis sur le marché, cela augmente l'utilité du consommateur en même temps que cela détériore l'environnement. Ces résultats sont conformes aux résultats standards de l'économie de l'environnement.

3. Conclusion

Dans un cadre microéconomique simple et à l'aide des outils de l'économie de l'environnement, nous avons élaboré les prémisses théoriques du fonctionnement d'un marché de PEN appliqués aux automobilistes. Le modèle a mis en évidence que la quantité de permis d'émissions allouée et le prix de celui-ci constituent immanquablement les deux paramètres fondamentaux déterminant la réussite ou non de l'instrument. En outre, les résultats théoriques montrent que l'efficacité du système de PEN est dépendante du prix du permis qui est notamment, mais pas seulement, déterminé par la quantité de permis allouée. Par conséquent, une trop grande quantité de permis disponible sur le marché entraîne un prix du permis faible, voire nul, engendrant l'inefficacité du système à atteindre l'objectif environnemental souhaité. Il apparaît alors essentiel de déterminer le nombre optimal de quotas afin d'assurer l'efficacité et le bon fonctionnement du système. Il a été trouvé que la quantité optimale de permis sur le marché est obtenue lorsque la somme des utilités marginales des individus est égale à la somme des dommages marginaux. Nous soulignons également le rôle important joué par le paramètre du coefficient d'élasticité de substitution, dans la mesure où il détermine la nature des modes de transports comme leur substituabilité ou leur complémentarité influençant l'équilibre modal.

Les résultats théoriques montrent le bon fonctionnement du système de PEN centré sur les automobilistes. Cependant, il a été remarqué à plusieurs reprises un effet particulier engendré par l'instauration du système de PEN, à savoir un effet revenu. Ce dernier est provoqué par l'allocation gratuite des permis, impliquant une hausse du revenu consacré aux déplacements, d'où une augmentation du nombre total de kilomètres parcourus. Toutefois, la norme environnementale est respectée, l'outil économique a atteint son objectif premier de réduction des nuisances provoquées par l'automobile.

Nous avons montré, par le biais de la formalisation microéconomique, que non seulement l'instrument des permis d'émissions négociables peut être appliqué aux automobilistes d'une ville, mais qu'en outre, cet outil se révèle efficace dans l'objectif d'accéder à une mobilité durable. De futures recherches seront réalisées afin de perfectionner ce modèle. Nous pensons notamment intégrer des extensions afin de contrecarrer l'effet revenu relevé.

BIBLIOGRAPHIE

GODDARD H.C. (1997), « Using Tradeable Permits to Achieve Sustainability in the World's Large Cities », *Environmental and Resource Economics*, vol. 10, pp. 63-99.

GODDARD (1999), "Promoting Urban Sustainability: The Case for a Tradable Supplementary Licence System for Vehicle Use", *Urban Studies*, vol. 36, n°13, pp. 2317-2331.

GOULDER et PARRY (2008), "Instrument choice in Environmental policy", *Discussion Paper 07-08*, Washington, DC: Resources for the Future.

HEPBURN (2006), "Regulation by prices, quantities, or both: a review of instrument choice", *Oxford review of economic policy*, vol. 22, n°2, pp. 226-247.

KOCKELMAN K.M. et KALMANJE S. (2005), « Credit-Based Congestion Pricing: A Proposed Policy and the Public's Response", *Transportation Research A*, 39, pp. 671-690.

PRATLONG F. (2005), « Environmental regulation incidences towards international oligopolies: pollution taxes vs emission permits », *Economics Bulletin*, vol.17, n°6, pp.1-10.

RAUX C. (2007a), *Les permis négociables dans le secteur des transports*, La Documentation française, collection Transports Recherche Innovation, Paris, p. 98.

RAUX (2007b), « Les droits à circuler échangeables: une alternative pertinente et réaliste au péage urbain ? » *Document de travail*, Laboratoire d'Économie des Transports.

RAUX C. et MARLOT G. (2005), « A System of Tradable CO_2 Permits Applied to Fuel Consumption by Motorists » *Transport Policy*, 12, pp. 255-265.

VERHOEF E. et NIJKAMP P. et RIETVELD P. (1997) « Tradeable permits: their potential in the regulation of road transport externalities », *Environment and Planning B: Planning an Design*, vol. 24, pp. 527-548.

WANG M.Q. (1994) « Cost savings of using a marketable permit system for regulating light duty vehicle emissions », *Transport policy,* vol. 1(4), p. 221-232.

ANNEXE N°1

➢ *Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°1*

Soit le programme suivant : $L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right)$ (**8**)

Les conditions du premier ordre sont :

$$CPO_1 : \frac{\partial L}{\partial V_i} = 0 \Leftrightarrow a_i V_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - p_V \lambda = 0$$

$$CPO_2 : \frac{\partial L}{\partial TC_i} = 0 \Leftrightarrow (1-a_i) TC^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - p_{TC} \lambda = 0$$

Grâce à ces deux conditions, nous obtenons :

$$\frac{a_i V_i^{\rho-1}}{(1-a_i) TC_i^{\rho-1}} = \frac{p_V}{p_{TC}} \text{ d'où } TMS = \frac{a_i}{(1-a_i)} \left(\frac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} = \frac{p_V}{p_{TC}} \quad (\mathbf{9})$$

➢ *Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°2*

Soit le Lagrangien suivant : $L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda \left(p_v V_i + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_{TC} TC_i$

(**12**)

Les conditions du premier ordre sont :

$$CPO_1 : \frac{\partial L}{\partial V_i} = 0 \Leftrightarrow a_i V_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - p_V \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_i V_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_V} = \lambda$$

$$CPO_2 : \frac{\partial L}{\partial TC_i} = 0 \Leftrightarrow (1-a_i) TC_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - p_{TC} \lambda + \mu_{TC} = 0$$

avec $\mu_{TC} > 0$

On a alors : $\mu_{TC} = -(1-a_i) TC_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} + p_{TC} \lambda > 0$; on remplace λ par son expression et on obtient :

$$\frac{a_i}{(1-a_i)} \left(\frac{V_i}{TC_i} \right)^{\rho-1} > \frac{p_V}{p_{TC}} \quad (\mathbf{13})$$

➢ *Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°3*

Le Lagrangien est représenté par :

$$L=\left[a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}-\lambda\left(p_vV_i+p_{TC}TC_i-R_{T_i}\right)+\mu_VV_i \quad \textbf{(16)}$$

Les conditions du premier ordre associées sont :

$$CPO_1:\frac{\partial L}{\partial V_i}=0\Leftrightarrow a_iV_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-p_V\lambda+\mu_V=0$$

avec $\mu_V>0$

$$CPO_2:\frac{\partial L}{\partial TC_i}=0\Leftrightarrow (1-a_i)TC_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-p_{TC}\lambda=0$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{(1-a_i)TC_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_{TC}}$$

On a alors : $\mu_V=-(a_i)V_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}+p_V\lambda>0$; on remplace λ par son expression et on obtient :

$$\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1}<\frac{p_V}{p_{TC}} \quad \textbf{(17)}$$

ANNEXE N°2

- *Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°4*

Soit le programme suivant :

$$L=\left[a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}-\lambda\left(p_vV_i+p_e(V_i-\overline{V}_i)+p_{TC}TC_i-R_{T_i}\right)$$

(**33**)

Les conditions du premier ordre sont :

$$CPO_1:\frac{\partial L}{\partial V_i}=0\Leftrightarrow a_iV_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-\left(p_V+p_e\right)\lambda=0$$

$$CPO_2:\frac{\partial L}{\partial TC_i}=0\Leftrightarrow (1-a_i)TC_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-p_{TC}\lambda=0$$

Grâce à ces deux conditions, nous obtenons :

$$\frac{a_iV_i^{\rho-1}}{(1-a_i)TC_i^{\rho-1}}=\frac{p_V+p_e}{p_{TC}}\text{ d'où } TMS=\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1}=\frac{p_V+p_e}{p_{TC}}\quad(\mathbf{34})$$

- *Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°5*

Soit le Lagrangien suivant : $L=\left[a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}-\lambda\left(p_vV_i+p_{TC}TC_i-R_{T_i}\right)+\mu_{TC}TC_i$

(**37**)

Les conditions du premier ordre sont :

$$CPO_1:\frac{\partial L}{\partial V_i}=0\Leftrightarrow a_iV_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-\left(p_V+p_e\right)\lambda=0$$

$$\Rightarrow\frac{a_iV_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_V+p_e}=\lambda$$

$$CPO_2:\frac{\partial L}{\partial TC_i}=0\Leftrightarrow (1-a_i)TC_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}-p_{TC}\lambda+\mu_{TC}=0$$

avec $\mu_{TC}>0$

On a alors : $\mu_{TC}=-(1-a_i)TC_i^{\rho-1}\times\left(a_iV_i^{\rho}+(1-a_i)TC_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}+p_{TC}\lambda>0$; on remplace λ par son expression et on obtient :

$$\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1} > \frac{p_V + p_e}{p_{TC}} \quad \textbf{(38)}$$

- *<u>Calculs des conditions de premier ordre relatives au cas n°6</u>*

Le Lagrangien est représenté par :

$$L = \left[a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(p_v V_i + p_e (V_i - \bar{V}_i) + p_{TC} TC_i - R_{T_i} \right) + \mu_V V_i \quad \textbf{(41)}$$

Les conditions du premier ordre associées sont :

$$CPO_1 : \frac{\partial L}{\partial V_i} = 0 \Leftrightarrow a_i V_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - \left(p_V + p_e \right)\lambda + \mu_V = 0$$

avec $\mu_V > 0$

$$CPO_2 : \frac{\partial L}{\partial TC_i} = 0 \Leftrightarrow (1-a_i) TC_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} - p_{TC}\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(1-a_i) TC_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_{TC}}$$

On a alors : $\mu_V = -(a_i) V_i^{\rho-1} \times \left(a_i V_i^{\rho} + (1-a_i) TC_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} + \left(p_V + p_e \right)\lambda > 0$; on remplace λ par son expression et on obtient :

$$\frac{a_i}{(1-a_i)}\left(\frac{V_i}{TC_i}\right)^{\rho-1} < \frac{p_V + p_e}{p_{TC}} \quad \textbf{(42)}$$

ANNEXE N°3

- *<u>Détermination des effets du prix du permis des émissions p_e sur les quantités d'équilibre</u>*

Soit $V_i^{**} = \left(\frac{a_i}{p_V + p_e}\right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma}\left(p_V + p_e\right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right)$, nous développons cette fonction pour trouver $V_i^{**} = \frac{a_i^{\sigma} R_{T_i} + a_i^{\sigma} p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma}(p_V + p_e) + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}(p_V + p_e)^{\sigma}}$

Cette relation est de la forme $\left(\frac{u}{v}\right)$, donc la dérivée par rapport à p_e est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec

$$u(p_e) = a_i^{\sigma} R_{T_i} + a_i^{\sigma} p_e \overline{V}_i \quad \Rightarrow u'(p_e) = a_i^{\sigma} \overline{V}_i$$

$$v(p_e) = a_i^{\sigma} p_V + a_i^{\sigma} p_e + (1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}(p_V + p_e)^{\sigma} \quad \Rightarrow v'(p_e) = a_i^{\sigma} + \sigma(1-a_i)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}(p_V + p_e)^{\sigma-1}$$

D'où

$$\frac{\partial V_i^{**}}{\partial p_e} = \frac{a_i^{\sigma} p_{TC}{}^{\sigma}\left(a_i^{\sigma} p_{TC}{}^{\sigma}\left(p_e + p_V\right)\left(p_V \overline{V}_i - R_{T_i}\right) - \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}\left(p_e + p_V\right)^{\sigma}\left(\sigma R_{T_i} - p_e \overline{V}_i - p_V \overline{V}_i + p_e \sigma\right)\right)}{\left(p_e + p_V\right)\left(a_i^{\sigma} p_{TC}{}^{\sigma}\left(p_e + p_V\right) + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}\left(p_e + p_V\right)^{\sigma}\right)^2}$$

Si $R_{T_i} > p_V \overline{V}_i$, alors on a $\frac{\partial V_i^{**}}{\partial p_e} < 0$, ce qui engendre $\frac{\partial V^{**}}{\partial p_e} < 0$

Soit $TC_i^{**} = \left(\frac{1-a_i}{p_{TC}}\right)^{\sigma} \left(\frac{R_{T_i} + p_e \overline{V}_i}{a_i^{\sigma}\left(p_V + p_e\right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}{}^{1-\sigma}}\right)$, nous développons cette fonction afin de trouver une forme $\left(\frac{u}{v}\right)$, ce qui donne $TC_i^{**} = \left(\frac{(1-a_i)^{\sigma} R_{T_i} + (1-a_i)^{\sigma} p_e \overline{V}_i}{p_{TC}{}^{\sigma} a_i^{\sigma}\left(p_V + p_e\right)^{1-\sigma} + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}}\right)$

D'où

$$\frac{\partial TC_i^{**}}{\partial p_e} = \frac{(1-a_i)^{\sigma}\left(p_e + p_V\right)^{\sigma}\left(\left(1-a_i\right)^{\sigma} \overline{V}_i p_{TC}\left(p_e + p_V\right)^{\sigma} + a_i^{\sigma} p_{TC}{}^{\sigma}\left(\sigma R_{T_i} - R_{T_i}\right) + \overline{V}_i\left(p_V + p_e \sigma\right)\right)}{\left(a_i^{\sigma} p_{TC}{}^{\sigma}\left(p_e + p_V\right) + \left(1-a_i\right)^{\sigma} p_{TC}\left(p_e + p_V\right)^{\sigma}\right)^2}$$

Si $R_{T_i} > p_V \overline{V}_i$ alors on a $\frac{\partial TC_i^{**}}{\partial p_e} > 0$, ce qui implique $\frac{\partial TC^{**}}{\partial p_e} > 0$.

ANNEXE N°4

- *Détermination des effets de la quantité de permis d'émissions sur le prix du permis du marché : cas général de la fonction C.E.S.*

Soit $p_e = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i^{\sigma} R_{T_i} - p_V \sum_{i=1}^{N} a_i^{\sigma} \overline{V}_i}{p_{TC}^{\,1-\sigma} \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^{\sigma} \overline{V}_i} \right)^{\frac{1}{\sigma}} - p_V$ **(55)**

En prenant la relation $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et en dérivant par rapport à $\overline{V}_i$, nous obtenons :

$$\frac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_{T_i} \left(\dfrac{(1-a_i)^{-\sigma} a_i \times p_{TC}^{\,\sigma-1} \left(R_{T_i} - p_V \overline{V}_i \right)}{\overline{V}_i} \right)^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i \left(-R_{T_i} + p_V \overline{V}_i \right)}$$

Si $\sum_{i=1}^{N} R_{T_i} > p_V \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i$, alors nous obtenons $\dfrac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i} < 0$

- *Détermination des effets de la quantité de permis d'émissions sur le prix du permis du marché : cas particulier où $\rho \to 0$: fonction Cobb-Douglas*

Soit $p_e = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i R_{T_i} - p_V \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i}{\sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i (1-a_i)}$

En prenant la relation $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et en dérivant par rapport à $\overline{V}_i$, nous obtenons :

$$\frac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (a_i - 1) a_i R_{T_i}}{\left(\sum_{i=1}^{N} \left(\overline{V}_i - a_i \overline{V}_i \right)^2 \right)},$$

Nous savons que $0 < a_i < 1$, donc $\dfrac{\partial p_e}{\partial \sum_{i=1}^{N} \overline{V}_i} < 0$